

И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, М. А. Семов

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация.

Актуальность и цель. Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений являются активно развивающимся направлением вычислительной математики, что в первую очередь связано с многочисленными приложениями гиперсингулярных интегральных уравнений к механике, аэродинамике, электродинамике, геофизике. При этом следует отметить два обстоятельства: 1) аналитическое решение гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях; 2) спектр приложений гиперсингулярных интегральных уравнений постоянно расширяется. Этим обусловлена актуальность построения и обоснования численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений. В настоящее время остались не разработанными методы приближенного решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений. Статья посвящена построению и обоснованию приближенного решения одного класса нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокаций.

Материалы и методы. Обоснование разрешимости и сходимости метода коллокаций к приближенному решению одного класса нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на замкнутых контурах, основано на применении методов функционального анализа и теории приближений.

Результаты. Предложен и обоснован метод коллокаций для приближенного решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на замкнутых контурах. Приведены оценки скорости сходимости и величины погрешности.

Выводы. Построена вычислительная схема, позволяющая эффективно решать прикладные задачи механики, аэродинамики, электродинамики, геофизики.

Ключевые слова: нелинейные гиперсингулярные интегральные уравнения, метод коллокаций, метод Ньютона – Канторовича.

I. V. Boykov, Yu. F. Zakharova, M. A. Semov

APPROXIMATE SOLUTION OF NONLINEAR HYPERSENSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS

Abstract.

Background. Approximate methods for solving hypersingular integral equations are an actively developing section of calculus mathematics owing to numerous applications of hypersingular integral equations in mechanics, aerodynamics, electrodynamics, geophysics. Here it is necessary to mention two important circumstances: 1) analytical solution of hypersingular integral equations is possible only in exceptional cases; 2) application range of hypersingular integral equations is constantly growing. These prove the relevance of building and substantiating numerical methods for solving hypersingular integral equations. At the present time the methods of approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations remain undeveloped. The article is devoted to building and substantiating an approximate solution of one class of nonlinear hypersingular integral equations by the method of collocations.

Materials and methods. Substantiation of solvability and convergence of the method of collocations to the approximate solution of one class of nonlinear hypersingular integral equations, determined on closed loops, is based on application of methods of functional analysis and approximation theory.

Results. The authors suggested and substantiated the method of collocations for the approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations, determined on closed loops. The article includes the estimates of convergence rate and extent of error.

Conclusions. The authors built a computing circuit allowing to effectively calculate applied problems of mechanics, aerodynamics, electrodynamics, geophysics.

Key words: nonlinear hypersingular integral equations, method of collocations, method of Newton-Kantorovich.

Введение

Численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений принадлежат к одному из наиболее активно развивающихся направлений вычислительной математики. В первую очередь это обусловлено многочисленными приложениями гиперсингулярных интегральных уравнений к задачам аэродинамики, электродинамики, ядерной физики. Решению линейных гиперсингулярных интегральных уравнений посвящено большое число работ, в которых предложены и обоснованы различные численные методы. Среди этих работ отметим монографию [1], в которой метод дискретных особенностей применяется для приближенного решения задачи бесциркулярного обтекания поверхности потоком газа; цикл работ [2–10], в которых предложены и при ряде дополнительных условий обоснованы проекционные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого и второго родов.

В то же самое время приближенные методы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений с нелинейностями в гиперсингулярных интегралах до сих пор остаются неисследованными. Насколько авторам известно, исключением является работа [11], в которой предложен и обоснован сплайн-коллокационный метод нулевого порядка решения гиперсингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t)x(t) + \int_{-1}^1 \frac{h(t, \tau, x(\tau))}{(\tau - t)^2} d\tau = f(t), \quad t \in (-1, 1).$$

В данной работе предложен и обоснован метод коллокации для решения гиперсингулярных интегральных уравнений вида

$$a(t)x(t) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau, x(\tau))}{(\tau - t)^p} d\tau = f(t), \quad t \in \gamma, p = 2, 3, \dots,$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат в плоскости комплексной переменной z .

1. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокации

Для обоснования приближенного решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокации ниже используется метод Ньютона – Канторовича, основанный на линеаризации нелинейного оператора.

При этом будут использованы результаты, полученные в работе [12] для приближенного решения линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокации. Приведем ниже эти результаты.

Предварительно приведем определения, используемые в работе.

Определение 1. Класс функций Гельдера $H_\alpha(M;[a,b])$ ($0 < \alpha \leq 1$) состоит из заданных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого отрезка неравенству

$$|f(x') - f(x'')| \leq M |x' - x''|^\alpha.$$

В случае, когда из текста ясно, на каком множестве рассматриваются функции, вместо $H_\alpha(M;[a,b])$ будем писать $H_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

Определение 2. Класс $W^r(M;[a,b])$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a,b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.

Определение 3. Класс $W^r H_\alpha(M;[a,b])$ состоит из функций $f(x)$, принадлежащих классу $W^r(M;[a,b])$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x) \in H_\alpha(M)$.

Напомним определение гиперсингулярных интегралов, обобщающее понятия интеграла в смысле главного значения Коши и интеграла в смысле Адамара.

Определение 4 [13]. Интегралом

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p}, \quad a < c < b,$$

в смысле главного значения Коши – Адамара называется следующий предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$$

где $\xi(v)$ – некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

Через $[X, Y]$ обозначено множество линейных ограниченных операторов, отображающих нормированное пространство X в нормированное пространство Y .

Рассмотрим гиперсингулярное интегральное уравнение

$$Kx \equiv a(t)x(t) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau)x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} = f(t), \quad t \in \gamma, \quad (1)$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат в плоскости комплексной переменной, $p = 2, 3, \dots$; $a(t), f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$; функция $h(t, \tau)$ принадлежит классу Гельдера H_α по первой переменной и имеет производные до $(p-1)$ -го порядка по второй переменной, причем

$$\frac{\partial^{p-1} h(t, \tau)}{\partial \tau^{p-1}} \in H_\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Введем пространство X функций $x(t)$, $t \in \gamma$, $x(t) \in W^{p-1} H_\beta$, $\beta < \alpha$, с нормой

$$\|x(t)\| = \sum_{k=0}^{p-1} \|x^{(k)}(t)\|_{C(\gamma)} + \sup_{t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in \gamma} \frac{|x^{(p-1)}(t_1) - x^{(p-1)}(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Через Y обозначим пространство функций $y(t)$, $t \in \gamma$, $y(t) \in H_\beta$, $\beta < \alpha$, с нормой

$$\|y(t)\| = \|y(t)\|_{C(\gamma)} + \sup_{t_1 \neq t_2, t_1, t_2 \in \gamma} \frac{|y(t_1) - y(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}.$$

Известно, что пространства X и Y банаховы.

Из определения гиперсингулярных интегралов и теории сингулярных операторов следует, что оператор K отображает пространство X в Y .

Будем считать, что K имеет линейный непрерывный обратный оператор $K^{-1} \in [Y, X]$.

Обозначим через X_n подпространство пространства X , состоящее из функций

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_k t^k \ln t + \sum_{k=p-1}^{n+p-1} \alpha_k t^k + \sum_{k=-n+p-1}^{-1} \alpha_k t^k, \quad (2)$$

а через Y_n – подпространство пространства Y , состоящее из полиномов

$$y_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k.$$

Введем узлы $t_k = e^{is_k}$, $s_k = 2k\pi / (2n+1)$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, и через $P_n[f]$ обозначим оператор проектирования непрерывных функций $f \in C(\gamma)$ на множество интерполяционных полиномов n -го порядка, построенных на узлах t_k , $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_k t^k \ln t + \sum_{k=p-1}^{n+p-1} \alpha_k t^k + \sum_{k=-n+p-1}^{-1} \alpha_k t^k,$$

коэффициенты $\{\alpha_k\}$ которой определяются по методу коллокации из системы линейных алгебраических уравнений, представимых в операторном виде уравнением

$$K_n x_n \equiv P_n \left[a(t)x_n(t) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau)x_n(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} \right] = P_n[f(t)]. \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [12]. Пусть оператор $K \in [X, Y]$ непрерывно обратим: $a_1, f \in H_{\alpha}, h(t, \tau) \in H_{\alpha\alpha}$. Тогда при n таких, что $q = C \ln^2 n / n^{\alpha-\beta} < 1$, система уравнений (3) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq \frac{C \ln^2 n}{n^{\alpha-\beta}}$, где x^* – решение уравнения (1).

2. Метод коллокаций для нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим уравнение

$$L(x) \equiv a(t)x(t) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau, x(\tau))}{(\tau-t)^p} d\tau = f(t), \quad t \in \gamma, \quad p = 2, 3, \dots \quad (4)$$

Будем считать, что $a(t), f(t) \in H_{\alpha}, 0 < \alpha \leq 1$; функция $h(t, \tau, u)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α по первой переменной и имеет частные производные до p -го порядка включительно по двум последним переменным, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α .

Приближенное решение уравнения (4) будем искать в виде функции (2), коэффициенты которой определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$L_n(x_n) \equiv P_n \left[a(t)x_n(t) + \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau, x_n(\tau))d\tau}{(\tau-t)^p} \right] = P_n[f(t)]. \quad (5)$$

Исследовать приближенное решение уравнения (4) будем в пространствах X, Y и их подпространствах X_n, Y_n , введенных в предыдущем разделе.

Нетрудно видеть, что производные Фреше операторов $L(x)$ и $L_n(x_n)$ на элементе x^0 соответственно равны

$$L'(x^0)x \equiv a(t)x(t) + \int_{\gamma} \frac{h'_3(t, \tau, x^0(\tau))x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau,$$

$$L'_n(x^0)x_n \equiv P_n \left[a(t)x_n(t) + \int_{\gamma} \frac{h'_3(t, \tau, x^0(\tau))x(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau \right],$$

где $h'_3(t, \tau, u)$ означает производную по третьему аргументу функции $h(t, \tau, u)$.

Будем считать, что оператор $L'(x^0)$ имеет линейный непрерывный обратный оператор $[L'(x^0)]^{-1} \in [Y, X]$.

В разд. 1 было показано, что при выполнении условия

$$q = C \ln^2 n / n^{\alpha-\beta} < 1$$

оператор $L'_n(x^0) \in [X_n, Y_n]$ имеет линейный непрерывный обратный оператор $[L'_n(x^0)]^{-1} \in [Y_n, X_n]$.

Для доказательства разрешимости системы уравнений (5) воспользуемся методом Ньютона – Канторовича.

Пусть X, Y – банаховы пространства.

Рассмотрим уравнение

$$Kx = 0, \quad (6)$$

где K – нелинейный оператор, действующий из X в Y .

Теорема 2 [14]. Пусть X и Y – банаховы пространства, и пусть выполнены условия:

1) $\|K(x_0)\| = \eta_0$;

2) оператор K имеет произвольную Фреше в окрестности точки x_0 , и существует правый обратный оператор $[K'(x_0)]_r^{-1}$ с нормой

$$\|[K'(x_0)]_r^{-1}\| = B_0;$$

3) в сфере $S: \{x: \|x - x_0\| \leq B_0 \eta_0 / (1 - q)\}$, $q < 1$, выполняется условие

$$\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \leq q / (B_0(1 + q)).$$

Тогда уравнение (6) имеет в S решение x^* , к которому сходятся приближения $x_{n+1} = x_n - [K'(x_n)]_r^{-1} Kx_n$, $n = 0, 1, \dots$, и справедлива оценка $\|x^* - x_n\| \leq q^n \eta_0 B_0 \eta_0 / (1 - q)$.

Теорема 3 [14]. Пусть X, Y – банаховы пространства, и пусть выполнены условия:

1) $\|Kx_0\| = \eta_0$;

2) оператор K имеет производную Фреше в окрестности точки x_0 , и существует правый обратный оператор $[K'(x_0)]_r^{-1}$ с нормой $\|[K'(x_0)]_r^{-1}\| = B_0$;

3) в сфере $S: \{x: \|x - x_0\| \leq B_0 \eta_0 / (1 - q)\}$, $q < 1$, выполняется условие $\|K'(x_1) - K'(x_2)\| \leq q / B_0$.

Тогда уравнение (6) имеет в S решение x^* , к которому сходятся приближения $x_{n+1} = x_n - [K'(x_0)]_r^{-1} Kx_n$, и справедлива оценка

$$\|x^* - x_n\| \leq q^n \eta_0 B_0 / (1 - q).$$

Будем искать приближенное решение уравнения (5) модифицированным методом Ньютона – Канторовича:

$$x_n^{m+1} = x_n^m - [L'_n(x_0)]^{-1} (L_n(x_n^m) - f_n), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где $f_n = P_n[f]$.

Проверим выполнение условий теоремы 3.

Справедливость условия 2 следует при достаточно больших n из теоремы 1.

Для доказательства сходимости итерационного процесса (7) достаточно проверить выполнение условия 3 теоремы 3.

Оценим норму разности

$$\begin{aligned} & \|L'_n(x')x_n - L'_n(x'')x_n\|_{C(\gamma)} \leq \\ & \leq \|P_n\|_{C(\gamma)} \left\| \int_{\gamma} \frac{h'_3(t, \tau, x'(\tau)) - h'_3(t, \tau, x''(\tau))x_n(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau \right\|_{C(\gamma)}. \end{aligned}$$

Известно, что $\|P_n\|_{C(\gamma)} \leq C \ln n$. Воспользовавшись определением гиперсингулярных интегралов и известными свойствами сингулярных интегралов, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\gamma} \frac{h'_3(t, \tau, x'(\tau)) - h'_3(t, \tau, x''(\tau))x_n(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau \right\| \leq \\ & \leq C \left\| \int_{\gamma} \frac{h_3^{(p)}(t, \tau, x'(\tau)) - h_3^{(p)}(t, \tau, x''(\tau))x_n(\tau)}{\tau - t} d\tau \right\| + \dots + \\ & + c \left\| \int_{\gamma} \frac{h'_3(t, \tau, x'(\tau)) - h'_3(t, \tau, x''(\tau))x_n^{(p-1)}(\tau)}{\tau - t} d\tau \right\| \leq \\ & \leq c \|x'(\tau) - x''(\tau)\|_X \|x_n(\tau)\|_X. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|L'_n(x')x_n - L'_n(x'')x_n\|_{C(\gamma)} \leq C \ln n \|x'(\tau) - x''(\tau)\|_X \|x_n(\tau)\|_X.$$

Так как $(L'_n(x')x_n - L'_n(x'')x_n)$ является полиномом n -го порядка, то

$$\|L'_n(x')x_n - L'_n(x'')x_n\|_Y \leq C n^B \ln n \|x'(\tau) - x''(\tau)\|_X \|x_n(\tau)\|_X$$

$$\text{и } \|L'_n(x') - L'_n(x'')\|_Y \leq C n^B \ln n \|x' - x''\|_X.$$

Таким образом, если x_0 достаточно хорошее начальное приближение к точному решению x^* , то выполнены условия теоремы 3 и итерационный процесс (6) сходится к решению x^* . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть уравнение (4) имеет решение $x^*(t) \in H_\alpha$. Пусть $a(t)$, $f(t) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$; функция $h(t, \tau, u)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α по первой переменной и имеет частные производные до p -го порядка включительно по двум последним переменным, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем α .

Пусть в шаре $S(x^*, r)$ выполнены следующие условия:

$$1) \|L(x^0)\| = \eta_0;$$

$$2) \text{ существует обратный оператор } [L'(x^0)]^{-1} \text{ с нормой } \|[L'(x^0)]^{-1}\| = B_0$$

(здесь x^0 – начальное приближение в итерационном процессе (6)). Тогда существует шар $B(x_0, r)$ такой, что при n таких, что $q = C \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-\beta}} < 1$, итерационный процесс (7) сходится к решению x_n^* уравнения (5) и справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\| \leq C \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-\beta}}.$$

Список литературы

1. Вайникко, Г. М. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения / Г. М. Вайникко, И. К. Лифанов, Л. Н. Полтавский. – М. : Янус-К, 2001. – 508 с.
2. Бойков, И. В. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // International Conference on Computational Mathematics. – Part first. – Novosibirsk, 2004. – P. 411–417.
3. Бойков, И. В. Коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Е. Г. Романова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – 2006. – № 5. – С. 42–50.
4. Бойков, И. В. Сплайн-коллокационный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, А. И. Бойкова // Вестник Харьковского национального университета. Сер. Математическое моделирование. Информационные технологии. Автоматизированные системы управления. – 2007. – С. 36–49.
5. Бойков, И. В. Приближенное решение гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 1 (13). – С. 80–90.
6. Бойков, И. В. Приближенные методы решения сингулярных и гиперсингулярных интегродифференциальных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3 (23). – С. 99–113.
7. Boykov, I. V. An Approximate Solution of Hypersingular Integral Equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova // Appl. Num. Math. – 2010. – № 60. – P. 607–628.

8. **Ganesh, M.** The numerical solution of a nonlinear hypersingular boundary integral equations / M. Ganesh and O. Steinbach // *J. Comput. Appl. Math.* – 2001. – № 131. – P. 267–280.
9. **Оседедец, И. В.** Приближенное обращение матриц / И. В. Оседедец, Е. Е. Тыртышников // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2005. – Т. 45, № 2. – С. 315–326.
10. **Capobiano, M. R.** Newton methods for a class of nonlinear hypersingular integral equations / M. R. Capobiano, G. Criscuolo, and P. Junghanns // *Numer. Algorithms.* – 2010. – № 55. – P. 205–221.
11. **Boykov, I. V.** An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations / I. V. Boykov, E. S. Ventsel, V. A. Roudnev, A. I. Boykov // *Applied Numerical Mathematics.* – 2014. – Vol. 86, December. – P. 1–21.
12. **Бойков, И. В.** Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений методом коллокаций / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, М. А. Семов, А. А. Есафьев // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.* – 2014. – № 3 (31). – С. 101–113.
13. **Чикин Л. А.** Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений / Л. А. Чикин // *Ученые записки Казанского государственного университета.* – 1953. – Т. 113, № 10. – С. 57–105.
14. **Бойков, И. В.** Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. – 316 с.

References

1. Vaynikko G. M., Lifanov I. K., Poltavskiy L. N. *Chislennyye metody v gipersingulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh prilozheniya* [Numerical methods in hypersingular integral equations and application thereof]. Moscow: Yanus-K, 2001, 508 p.
2. Boykov I. V., Romanova E. G. *International Conference on Computational Mathematics.* Part first. Novosibirsk, 2004, pp. 411–417.
3. Boykov I. V., Romanova E. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Estestvennyye nauki* [University proceedings. Volga region. Natural sciences]. 2006, no. 5, pp. 42–50.
4. Boykov I. V., Boykova A. I. *Vestnik Khar'kovskogo natsional'nogo universiteta. Ser. Matematicheskoe modelirovanie. Informatsionnye tekhnologii. Avtomatizirovannyye sistemy upravleniya* [Bulletin of Kharkov National University. Series: Mathematical modeling. Information technologies. Automatic control systems]. 2007, pp. 36–49.
5. Boykov I. V., Zakharova Yu. F. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2010, no. 1 (13), pp. 80–90.
6. Boykov I. V., Zakharova Yu. F. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2012, no. 3 (23), pp. 99–114.
7. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. *Appl. Num. Math.* 2010, no. 60, pp. 607–628.
8. Ganesh M. and Steinbach O. *J. Comput. Appl. Math.* 2001, no. 131, pp. 267–280.
9. Oseledets I. V., Tyrtshnikov E. E. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [The journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2005, vol. 45, no. 2, pp. 315–326.
10. Capobiano M. R., Criscuolo G. and Junghanns P. *Numer. Algorithms.* 2010, no. 55, pp. 205–221.
11. Boykov I. V., Ventsel E. S., Roudnev V. A., Boykov A. I. *Applied Numerical Mathematics.* 2014, vol. 86, December, pp. 1–21.

12. Boykov I. V., Zakharova Yu. F., Semov M. A., Esaf'ev A. A. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 3 (31), pp. 101–113.
13. Chikin L. A. *Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta* [Memoirs of Kazan State University]. 1953, vol. 113, no. 10, pp. 57–105.
14. Boykov I. V. *Priblizhennoe reshenie singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Approximate solution of singular integral equations]. Penza: Izd-vo PGU, 2004, 316 p.
-

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Il'ya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of higher and applied mathematics, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Захарова Юлия Фридриховна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра высшей и прикладной
математики, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Zakharova Yuliya Fridrikhovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of higher and applied
mathematics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Семов Михаил Александрович

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Semov Mikhail Aleksandrovich

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 517.392

Бойков, И. В.

Приближенное решение нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений / И. В. Бойков, Ю. Ф. Захарова, М. А. Семов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 69–78.